APRIL/MAY 2023

## CMA51/BMA51/UMA51 — ABSTRACT ALGEBRA

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

Shanmuga Industries Arts & Science College
T.V.Malai

### SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.

1. Define: abelian group
   வரையறு: அபீலியன் குலம்

2. Define: Order of an element.
   வரையறு: ஓர் உறுப்பின் வரிசை

3. Define: normal subgroup.
   வரையறு: நேர்மை உட்குலம்

4. Define: Kernel of a homomorphism.
   வரையறு: செயல்மாறாக கோர்த்தலின் உட்கரு.

5. Define: Automorphism
   வரையறு: தன் உருவாக்கம்

6. Define: Permutation
   வரையறு: வரிசை மாற்றம்

7. State any two properties of ring.

வளையத்தின் ஏதேனும் இரு பண்புகளைக் கூறுக.

8. Define: Quotient rings.

வரையறு: ஈவு வளையம்

9. Define: Maximal ideal

வரையறு: மீப்பெரு சீர்மம்

10. Define: Euclidean ring

வரையறு: யூக்லீடியன் வளையம்

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions.

11. (a) show that a non empty subset $H$ of $G$ is a subgroup iff $a,b\in H \Rightarrow ab^{-1}\in H$.

$G$-ன் வெற்றற்ற உட்கணம் $H$ ஆனது உட்குலமாக இருக்க தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை $a,b\in H \Rightarrow ab^{-1}\in H$ என நிறுவுக.

Or

(b) If $G$ is a finite group and $a\in G$, then prove that $a^{o(G)}=e$.

$G$ என்பது முடிவுறு குலம் மற்றும் $a\in G$ எனில் $a^{o(G)}=e$ என நிறுவுக

19. If $U$ is an ideal of the ring $R$, then prove that $R/U$ is a ring.

$U$ என்பது வளையம் $R$-ன் சீர்மம் எனில் $R/U$ என்பது ஒரு வளையம் என நிறுவுக.

20. State and prove unique factorization theorem.

தனித்துவ காரணிப்படுத்தல் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

---

Shanmuga Industries Arts & Science College
T.V.Malai

12. (a) If $H$ and $K$ are finite subgroups of $G$ of orders $O(H)$ and $O(K)$ respectively, then prove that $O(HK)=\frac{O(H).O(K)}{O(H\cap K)}$.

$H$ மற்றும் $K$ என்பவை முறையே $O(H)$ மற்றும் $O(K)$ வரிசைகளை உடைய $G$ ன் முடிவுறு உட்குலங்கள் எனில் $O(HK)=\frac{O(H).O(K)}{O(H\cap K)}$ என நிறுவுக.

Or

(b) Prove that subgroup $N$ of $G$ is a normal subgroup of $G$ iff the product of two right cosets of $N$ in $G$ is again a right coset of $N$ in $G$.

$G$ -ன் உட்குலம் $N$ ஆனது $G$-ன் நேர்மை உட்கலமாக இருக்க தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை $G$ - ல் $N$ -ன இரு வலது துணைகணங்களின் பெருக்கலும் ஓர் வலது துணைகணமாக இருக்கும் என நிறுவுக.

13. (a) Show that $I(G)$ is a normal subgroup of $A(G)$

$I(G)$ என்பது $A(G)$ -ன் நேர்மை உட்குலமாகும் எனக் காட்டுக.

Or

(b) Show that every permutation is the product of it's cycles.

எந்த ஒரு வரிசை மாற்றமும் அதன் சுழல்களின் பெருக்கலாகும் எனக் காட்டுக.

14. (a) Show that every finite integral domain is a field.

எந்த ஒரு முடிவுறு எண் அரங்கமும் புலமாகும் எனக் காட்டுக.

Or

(b) If $U$ is an ideal of $R$ and $I \in U$, then prove that $U = R$.

$U$ என்பது $R$-ன் சீர்மம் மற்றும் $I \in U$ எனில் $U = R$ என நிறுவுக.

15. (a) Let $R$ be a commutative ring with unit element whose only ideals are $(O)$ and $R$ itself, then prove that $R$ is a field.

$R$ என்பது அலகு உறுப்பு கொண்ட பரிமாற்றும் வளையம் மேலும் அதன் சீர்மங்கள் $(O)$ மற்று $R$ மட்டுமே, எனில் $R$ என்பது புலம் என நிறுவுக.

Or

(b) Show that a Euclidean ring possesses a unit element.

யூக்லீடியன் வளையமானது அலகு உறுபபைக் கொண்டிருக்கும் எனக் காட்டுக.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. State and prove Lagrange's theorem.

லெக்ராஞ்சியின் தேற்றத்தை கூறி நிறுவுக

17. Let $\phi : G \to \overline{G}$ is an onto homomorphism with kernel $K$, then prove that $G/K \approx \overline{G}$.

$\phi : G \to \overline{G}$ என்பது மேலான செயல் மாறு சார்பு. அதன் உட்கரு $K$ எனில் $G/K \approx \overline{G}$ என நிறுவுக.

18. State and prove Cayley's theorem.

கெய்லியின் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.